

Representações de semigrupos por matrizes sobre um corpo

Donald B. McAlister
Department of Mathematical Sciences
Northern Illinois University
DeKalb, IL 60115
U.S.A.

Abstract

Representações por matrizes têm lugar importante na teoria de grupos finitos. A situação é diferente com semigrupos finitos apesar de que existe uma teoria substancial para a construção de representações de semigrupos. Neste seminário demos uma introdução à teoria de representações de semigrupos finitos que indica as semelhanças e as diferenças entre as situações para grupos e semigrupos e que mostra porque a situação de semigrupos é mais difícil de que a de grupos.

O autor agradece o Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa (CAUL) pela sua hospitalidade e a Fundação Luso-Americana para Desenvolvimento (FLAD) pelo seu apoio financeiro.

Uma representação de um semigrupo (ou um grupo, ou uma álgebra) S por matrizes sobre um corpo K é um homomorfismo θ de S numa álgebra $M_n(K)$ de matrizes $n \times n$ sobre K . Vamos assumir que, se S tem identidade, então a sua imagem é a matriz identidade; se S tem zero, a imagem do zero é a matriz nula.

Apesar de a definição poder ser dado em três versões, realmente não há diferenças essenciais entre elas. Pois, se S é um semigrupo e K um corpo podemos construir uma álgebra KS da seguinte forma.

KS é espaço vectorial sobre K tendo como base o conjunto dos elementos de S que diferem do zero. A multiplicação $*$ em KS é construída da multiplicação em S a partir da regra

$$s * t = \begin{cases} st & \text{seja } st \neq 0 \\ 0 & \text{seja } st = 0 \end{cases}$$

1 Álgebras

Suponhamos que temos uma representação da álgebra A por matrizes sobre K . Então, as matrizes $n \times n$ são essencialmente transformações lineares do espaço vectorial K^n , de dimensão n sobre K . Temos por isso um morfismo θ de A em $\text{Hom}(K^n, K^n)$. Este morfismo fica $V = K^n$ um A -módulo, onde

$$v.a = v(a\theta) \text{ para cada } v \in V \text{ e } a \in A.$$

Por outro lado, cada A -módulo V , de dimensão finita, dá-nos uma representação de A por matrizes quando escolhemos uma base para V e pomos para matriz $M(a)$ a matriz do operador de multiplicação por a no módulo V . Isto significa que podemos pensar em representações de álgebras como matrizes ou como A -módulos e é fácil transferir as ideias dum lado para outro. Por exemplo, diz-se que uma representação de um semigrupo S (de uma álgebra A) é irreductível quando o módulo é simples; isto é, só tem submódulos triviais. Suponhamos que W é um submódulo de V e W^\perp um subespaço complementar ao W . Então a matriz que corresponde à acção de cada elemento de A tem a forma

$$\begin{bmatrix} a\theta_1 & 0 \\ * & a\theta_2 \end{bmatrix}$$

onde θ_1 é a representação que corresponde a W e θ_2 é a representação que corresponde a V/W .

Um caso especial é o em que a matriz $a\theta$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} a\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a\theta_r \end{bmatrix}$$

onde cada θ_i é irreductível. Este corresponde à situação em que o módulo é soma directa de módulos simples. Neste caso dizemos que a representação, ou o módulo, é **completamente reductível**. Se cada representação, cada módulo, é completamente reductível dizemos que a álgebra é **semisimples**.

O resultado seguinte dá informação importante sobre álgebras semisimples. Isto deve-se ao trabalho de Artin, Wedderburn, Jacobson e (provavelmente muitos) outros.

Teorema. Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre o corpo K . Então

1. Chama-se radical $\text{rad}(A)$ à intersecção dos núcleos de representações irreductíveis de A ;

$$\text{rad}(A) = \{a \in A : ra \text{ é nilpotente para cada } r \in A\}$$

2. A é semi-simples se e só se $\text{rad}(A) = \{0\}$.
3. A é semi-simples se e só se existe um isomorfismo entre A e uma soma directa de álgebras de matrizes sobre álgebras divisorias sobre K ;
4. Seja A semi-simples, então cada A -module simples admite num isomorfismo sobre eA para algum idempotente mínimo $e \neq 0$ de A .

2 Representações de grupos finitos.

A teoria de representações de grupos finitos é como já disse uma parte importante da teoria dos grupos há muitos anos. Tem, por exemplo, um papel importante na classificação dos grupos simples finitos. Este estudo precisa de representações que não sejam irreductíveis mas só indecomponíveis isso é de representações modulares. Mas, relativamente a este seminário o resultado com interesse é o Teorema clássico de Maschke.

Teorema. (Maschke) Seja G um grupo e K um corpo. Então cada representação de G por matrizes sobre K é completamente reduzível se e só se a característica de K é 0 ou um primo que não divida o ordem de G .

A demonstração deste resultado é muito interessante. Indica ambos as propriedades de módulos e é também o que faz um semigrupo ser grupo. Por isso, damos uma ideia da prova.

Suponhamos que $|G|$ tem inverso em K que é equivalente à condição sobre a característica de K . Seja M um KG -módulo e N um submódulo que difere de $\{0\}$. Vamos demonstrar que M descompõe-se numa soma directa $N \oplus N_1$ de submódulos. Agora, como M é espaço vectorial, $M = N \oplus N_1$ onde N_1 é subespaço de M . A ideia é modificar N_1 para que se torne submódulo. Para cada $m \in M$, existe um único par $n \in N, n_1 \in N_1$ com $m = n + n_1$. Podemos por isso definir $\pi : M \rightarrow N_1$ por $m\pi = n_1$; esta função é linear. Na base de π definimos

$$m\psi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (mg^{-1})\pi g$$

para cada $m \in M$. Vemos que isto faz sentido pois $|G|$ tem inverso em K .

Claramente, ψ é linear e temos

$$\begin{aligned} (mh)\psi &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (mhg^{-1})\pi g \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} (mk^{-1})\pi kh \text{ onde } k = gh^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} (mk^{-1})\pi k \right) h = m\psi.h. \end{aligned}$$

Assim ψ é morfismo de KG -modules e por isso $N_2 = M\psi$ é submódulo. Mais, $n\pi = 0$ para cada $n \in N$ e temos

$$n\psi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ng^{-1})\pi g = 0;$$

isto é $N \subseteq \ker \psi$ e por isso $N_2 = N_1\psi$ tem dimensão $\leq n - \dim(N)$. Mas $m \in M$ implica que $m - m\pi \in N$ e

$$\begin{aligned} m - m\psi &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \{m - (mg^{-1})\pi g\} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \{mg^{-1} - (mg^{-1})\pi\}g. \end{aligned}$$

Agora $mg^{-1} - (mg^{-1})\pi \in N$ para cada $g \in G$ e então, porque N é submódulo, $m - m\psi \in N$ para $m \in M$. Isto é $M = N + N_2$ e, tendo em conta a dimensão, $M = N \oplus N_2$.

Para o recíproco, suponha que $|G| = 0$ em K e defina

$$e = \sum_{g \in G} g.$$

Claramente $e \neq 0 \in KG$ e $eh = \sum_{g \in G} gh = e$ para cada $h \in G$, pois a multiplicação permuta os elementos de G . Segue que $e^2 = e \sum_{g \in G} g = |G|e = 0 \in KG$. E por isso

$$(er)^2 = \left(e \sum_{g \in G} \alpha_g g \right)^2 = e^2 \left(\sum_{g \in G} \alpha_g \right)^2 = 0$$

para cada $r = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in KG$ o que mostra que $e \in \text{rad}(KG)$.

3 Representações de semigrupos.

Agora, olhemos sobre a situação de representações de semigrupos. Não podemos usar o método da demonstração do Teorema de Maschke pois o semigrupo não tem inversos globais e não é invariante para a multiplicação. Por isso precisamos olhar mais directamente na construção das próprias representações. Os resultados desta secção dependem do trabalho de muitas pessoas entre elas Clifford, Hewitt e Zuckerman, Hall, Munn, Lallement e Petrich, e Ponizovsky.

Seja então S semigrupo e G subgrupo máximo de S . Então o ideal S^1GS^1 gerado por G tem a forma do diagrama seguinte

onde

$$J = \{x \in S : S^1xS^1 = S^1gS^1 \text{ para algum elemento } g \in G\}$$

e

$$I(J) = \{x \in S : S^1xS^1 \subset S^1GS^1\}$$

é ideal de S . Mais, $S^1GS^1/I(J) \approx J^0 \approx \mathcal{M}^0(G; m, n; P)$ para algum $n \times m$ matriz P sobre G^0 ; isto é, J^0 é semigrupo de Rees. Dizemos que J é \mathcal{J} -classe regular de S .

Proposição. Seja θ uma representação irreductível do semigrupo S sobre o corpo K . Então

$$J_\theta = \{x \in S : s\theta \text{ tem potência mínima não zero entre os elementos de } S\theta\}$$

é J -classe regular de S e θ é completamente determinado pela sua restrição a qualquer subgrupo máximo de J_θ .

Dizemos que J_θ é apex de θ .

Proposição. Existe uma função bijectiva entre o conjunto das representações irreductíveis de S que têm apex uma \mathcal{J} -classe regular J e o conjunto das representações irreductíveis de qualquer subgrupo máximo G de J .

Notamos que esta correspondência pode ser feita completamente de uma forma explícita.

Seja KS semisimples, então KG também é semisimples para cada subgrupo máximo de S . Por isso, é preciso que a característica de K não divida o ordem de qualquer subgrupo de S . Mas, esta condição não serve para confirmar se KS é semisimples. De facto

Proposição. KS é semisimples se e só se

1. S é semigrupo regular
2. Seja J uma \mathcal{J} -classe de S com $J^0 \approx M^0(G; m, n; P)$ então $m = n$ e P é matriz invertível sobre KG .
3. $\text{char}(K)$ não divide a ordem de qualquer subgrupo de S .

Corolário. Seja S semigrupo inverso. Então KS é semisimples se e só se $\text{char}(K)$ não divide a ordem de qualquer subgrupo de S .

É interessante perguntar então qual é o radical de KS quando KS não é semisimples. Podemos dizer o seguinte:

Proposição. No caso em que $\text{char}(K)$ não divide a ordem de qualquer subgrupo de S

$$\text{rad}(KS) = \{x \in KS : JxJ \subseteq KI(J) \text{ para cada } \mathcal{J}\text{-classe regular } J \text{ de } S\}$$

Podemos ainda dizer algo sobre o expoente do radical de KS . Dizemos que uma \mathcal{J} -classe regular J com $J^0 \approx M^0(G; m, n; P)$ é K -singular se P não tem inversa sobre KG . Se J é uma \mathcal{J} -classe não regular dizemos também que J é K -singular.

Proposição. Suponhamos que S não tem uma cadeia de J -classes K -singulares com mais de n membros. Então o radical de KS tem expoente $\leq 2^{n+1} + 1$. Para cada n existe um tal semigrupo (de facto uma banda) em que o radical de KS tem expoente $2^{n+1} + 1$.

A maior parte destes resultados sobre semigrupos são negativos no sentido que eles indicam que normalmente KS não é semisimples. Em geral é difícil confirmar se KS é ou não semisimples. Pois temos de tentar inverter uma matriz sobre a álgebra KG de um grupo, o que não é fácil! Para terminar, referimos a um resultado que indica uma situação em que podemos afirmar que KS é semisimples.

Teorema. (Okninski-Putcha, 1991) Seja K um corpo finito e n um número inteiro positivo. Então o semigrupo S de matrizes $n \times n$ sobre K é semisimples sobre o corpo \mathbb{C} dos números complexos; isto é CS é semisimples.

Apesar deste resultado ser fácil de compreender não é fácil de provar!