

Coberturas E -unitárias para semigrupos inversos parcialmente ordenados

Donald B. McAlister

Department of Mathematical Sciences
Northern Illinois University

e

Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa (CAUL)

Universidade do Minho

16 de Junho 2011

Seja S um semigrupo inverso. Então

- ① diz-se S é *parcialmente ordenado* caso admite uma ordem parcial \leq tal que

$$a \leq b \Rightarrow xay \leq xby$$

para quaisquer $x, y \in S^1$;

- ② diz-se S é *semigrupo inverso \vee -semireticulado* caso admite uma ordem de \vee -semireticulado \vee tal que

$$x(a \vee b)y = xay \vee xby$$

para quaisquer $x, y \in S^1$;

- ③ diz-se S é um *semigrupo inverso reticulado* caso é semigrupo \vee -semireticulado e \wedge -reticulado; assim S é reticulado sob as operações \vee e \wedge e a multiplicação distribua sobre estas operações.

Exemplo 1: o semigrupo dos cosets

Seja G um grupo. Então o conjunto $\mathcal{K}(G)$ de todos os cosets Hx , com H um subgrupo de G e $x \in G$, é um semigrupo inverso sob a multiplicação

$$Ha * Kb = (H \vee aKa^{-1})ab.$$

É, de facto, semigrupo inverso \vee -semireticulado com

$$Ha \vee Kb = (H \vee K \vee \langle ab^{-1} \rangle)a;$$

aqui $H \vee K$ denota o subgrupo gerado por os subgrupos H e K enquanto $\langle g \rangle$ é o subgrupo gerado por $g \in G$.

Exemplo 2: semigrupos E^* -inversos

Seja $S = S^0$ um semigrupo inverso então diz-se S é *semigrupo E^* -unitário* se e só se $0 \neq e = ex$, onde e é idempotente, implica $x = x^2$.

Tal semigrupo S é semigrupo inverso \vee -semireticulado sob o recíproco da ordem natural: isto é $a \leq b$ se e só se $b = ea$ para qualquer idempotente $e \in S$.

Caso $aa^{-1}bb^{-1} \neq 0$ então $a \vee b = aa^{-1}b = bb^{-1}a$; caso contrário, ($aa^{-1}bb^{-1} = 0$) então $a \vee b = 0$.

Exemplo 3: semigrupos de conjuntos permissíveis

Diz-se um subconjunto P de um semigrupo inverso S é *permissível* caso P é ideal de ordem de S sob a ordem natural e st^{-1} , $s^{-1}t$ são idempotentes para quaisquer $s, t \in P$.

O conjunto $C(S)$ de todos os conjuntos permissíveis, inclusive do conjunto \emptyset , é um semigrupo inverso sob a multiplicação de subconjuntos. A ordem natural é a inclusão.

$C(S)$ é semigrupo \vee -semireticulado sob o recíproco da ordem natural.

Exemplo 4: ordens totais compatíveis nas cadeias finitas

Uma cadeia de ordem n é um conjunto parcialmente ordenado isomorfa a conjunto $1, 2, \dots, n$, sob a ordem de costume. É semigrupo sob a multiplicação $ef = \min\{e, f\}$.

Proposição

(Madeiros) Uma cadeia com n elements admite 2^{n-1} ordens totais compatíveis não isomorfas.

Seja G um grupo parcialmente ordenado sob a ordem \leq :

- 1 se G é \vee -semiretuculado sob \leq . Então G é semigrupo inverso \vee -semiretuculado;
- 2 se G é grupo \vee -semiretuculado então G é grupo reticulado:

$$a \wedge b = (a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} = a(a \vee b)^{-1}b = b(a \vee b)^{-1}a$$

para quaisquer $a, b \in G$;

- 3 se G é grupo \vee -semiretuculado, os elementos $a \vee 1$ e $a^{-1} \vee 1$ comutam para qualquer $a \in G$.
- 4 (Magnus) Seja G um grupo livre reticulado. Então a ordem \leq é uma ordem total.
- 5 O grupo reticulado livre, com mais de um gerador, não é livre.

Seja S semigrupo inverso \vee -semireticulado:

- 1 se S é semigrupo inverso reticulado finito então todos os elementos de S são idempotentes;
- 2 o subsemigrupo $E = E(S)$ dos idempotentes de S é um \vee -subsemireticulado; isto é $e \vee f$ é idempotente para quaisquer idempotentes $e, f \in E$;
- 3 a congruência mínima de grupo σ sobre S é \vee -congruência. Portanto $G = S/\sigma$ admite a estrutura dum grupo reticulado tal que o homomorfismo $\sigma^{\natural} : S \longrightarrow G$ é homomorfismo de semigrupos inversos \vee -semireticulados;
- 4 se S é semigrupo E -unitário finito então todos os elementos de S são idempotentes.

Seja S um semigrupo inverso \vee -semireticulado e T um semigrupo também inverso \vee -semireticulado mas E -unitário.

- Então diz-se T é *cobertura E^\vee -unitária* de S se existe um \vee -homomorfismo sobrejetivo $\eta : T \rightarrow S$ que separa os idempotentes.
- Caso S e T são semigrupos \wedge -semireticulados, em vez de \vee -semireticulados, diz-se T é *cobertura E^\wedge -unitária*.
- Caso S e T são semigrupos reticulados, diz-se T é *cobertura E^\diamond -unitária*.

Teorema

(Giraldes, Gomes, McA) *Seja S um semigrupo inverso. Então existe um semigrupo inverso E -unitário que é \vee -semireticulado e um homomorfismo $\eta : T \rightarrow S$ que separa os idempotentes.*

Teorema

Cada semigrupo inverso \vee -semireticulado tem cobertura E^\vee -unitária se e só se os semigrupos inversos \vee -semireticulados livres são semigrupos E -unitários.

- 1 Seja S um semigrupo inverso \vee -semireticulado e T um semigrupo inverso E -unitário que também é \vee -semireticulado.
- 2 Seja G a imagem de grupo máxima de T . (Portanto G é grupo reticulado). Suponhe que existe um \vee -homomorfismo sobrejetivo $\eta : T \rightarrow S$.
- 3 Seja $w = 1$ uma igualdade de grupos \vee -semireticulados que é válida em G . Denotamos por \bar{w} uma palavra nos elementos de S obtida por substituir cada aparência de 1 por um idempotente de S . Digamos que \bar{w} é uma extensão de w por idempotentes.
- 4 Num grupo parcialmente ordenado, $x \geq 1$ implica $x^{-1} \leq 1$. Portanto a igualdade $(x \vee 1)^{-1} \vee 1 = 1$ é válida em qualquer grupo reticulado, em particular, é válida em G .
- 5 Seja $w = (x \vee 1)^{-1} \vee 1$ então $\bar{w} = (x \vee e)^{-1} \vee f$ onde e, f são idempotentes de S .

Lema

Seja $w = 1$ uma igualdade de grupos \vee -semireticulados válida em G . Então a igualdade $\bar{w}^2 = \bar{w}$ é válida em S para qualquer extensão de w por idempotentes.

Corolário

Seja S um semigrupo inverso \vee -semireticulado. Se S admite uma cobertura E^\vee -unitária então $(x \vee e)^{-1} \vee f$ é idempotente para quaisquer elemento x e idempotentes $e, f \in S$.

Corolário

Seja S um semigrupo inverso \vee -semireticulado com zero 0 . Se S admite uma cobertura E^\vee -unitária então $x \geq 0$ implica $x^2 = x$.

Teorema

Semigrupos inversos \vee -semireticulados livres não são E -unitários.

Exemplo

Seja $G = \{a, e\}$ um grupo com dois elementos então $G^u = \{a, e, u\}$, com u como zero, é semigrupo inverso \vee -semireticulado sob a ordem $a, e \leq u$.

Junte a G^u mais um zero 0 e defina $0 \leq x$ para qualquer $x \in G^u$. Então $S = \{a, e, u, 0\}$ é um semigrupo inverso \vee -semireticulado.

Dado que $a \geq 0$ mas a não é idempotente, S não admite cobertura E^\vee -unitária.

Teorema

Seja S um semigrupo inverso reticulado. Se S tem cobertura E^\diamond -unitária então S é E -unitário.

Corolário

Seja S um semigrupo inverso. Então cada imagem de S por um homomorfismo de semigrupos reticulados é E -unitário.

Corolário

A classe dos semigrupos inversos reticulados E -unitários é uma subvariedade da variedade de semigrupos inversos reticulados.

Seja S um semigrupo inverso parcialmente ordenado. Diz-se S é *naturalmente ordenado* se $e \leq f \Leftrightarrow e = ef$.

Repare que, seja S um semigrupo inverso \vee -semireticulado e naturalmente ordenado então $E = E(S)$ é reticulado distributivo.

Teorema

Seja S um semigrupo inverso \vee -semireticulado. Se S for naturalmente ordenado então os seguintes são equivalentes:

- 1 S admite um cobertura E^\vee -unitária;
- 2 $(x \vee e)^{-1} \vee f$ é idempotente para quaisquer $e = e^2, f = f^2, x \in S$;
- 3 S é E -unitário.

Corolário

Os semigrupos inversos \vee -semireticulados que são naturalmente ordenados e E -unitários formam uma subvariedade da variedade de semigrupos inversos \vee -semireticulados. Esta subvariedade é definido por as igualdades

$$\begin{aligned}xx^{-1}(xx^{-1} \vee yy^{-1}) &= xx^{-1}; \\(xx^{-1} \vee (yy^{-1} \vee z))^2 &= xx^{-1} \vee (yy^{-1} \vee z).\end{aligned}$$

Resultados positivos

Diz-se um semigrupo inverso \vee -semireticulado *co-naturalmente ordenado* se a ordem nos idempotentes é o recíproco da ordem natural. Isto é, $e \leq f$ se e só se $f = ef$.

Os três exemplos (semigrupos E^* -unitárias, $\mathcal{K}(G)$, e semigrupos de subconjuntos permissíveis) que considerámos acima são co-naturalmente ordenados. Em todos estes casos, a ordem sobre S é o recíproco da ordem natural sobre S .

Teorema

Seja S um semigrupo inverso que é \vee -semireticulado sob o recíproco da ordem natural. Então S admite uma cobertura E^\vee -unitária.

Corolário

Seja S um semigrupo inverso E^ -unitário sob o inverso da ordem natural, $S = \mathcal{K}(G)$ para qualquer grupo G , S o semigrupo de subconjuntos permissíveis de qualquer semigrupo inverso, então S admite uma cobertura E^\vee -unitária.*

Teorema

Seja S um semigrupo inverso finito \vee -semireticulado co-naturalmente ordenado. Então os seguintes são equivalentes:

- 1 $(x \vee e)^{-1} \vee f$ é idempotente para quaisquer $e^2 = e$, $f^2 = f$, $x \in S$;
- 2 $a \geq e = e^2$ implica $a^2 = a$ para quaisquer $e, a \in S$;
- 3 \leq é o recíproco da ordem natural;
- 4 S admite uma cobertura E^\vee -unitária.